

Theorie 3: Vielteilchenphänomene

Sommersemester 2012

Dozent: F. Marquardt

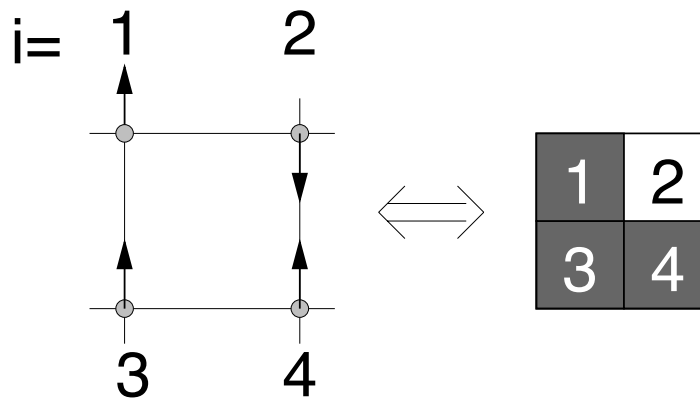
Blatt 10, Abgabe: 28.6.2012

Präsenzaufgabe

Ising-Modell mit 4 Plätzen

Wir betrachten ein quadratisches Gitter aus 4 Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen mit ferromagnetischer Wechselwirkung zwischen benachbarten Spins,

$$E = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j, \quad J > 0.$$



Dabei wird über alle Paare von nächsten Nachbarn $\langle i, j \rangle$ summiert, d.h. über die Paare von Quadraten (siehe Skizze), die eine gemeinsame Seite haben. Die ferromagnetische Kopplungskonstante J wird dabei so gewählt, dass sie die Einheit einer Energie hat und die Spinausrichtung des i -ten Spins durch $\sigma_i = \pm 1$ beschrieben wird.

a) Um die Zustandssumme (und weitere thermodynamische Größen) zu berechnen, müssen Sie die möglichen Energien des Systems und ihre Entartung finden. Skizzieren Sie die entsprechenden Konfigurationen (siehe Skizze). Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie mit der Gesamtzahl möglicher Zustände vergleichen und geben Sie die Zustandssumme an.

b) Aus der Zustandssumme kann die Wahrscheinlichkeit jedes Zustandes und damit Erwartungswerte von beliebigen Größen berechnet werden. Berechnen und skizzieren Sie in Abhängigkeit von T die Erwartungswerte

$\langle \sigma_1 \rangle$ und die Korrelatoren $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle$ und $\langle \sigma_1 \sigma_4 \rangle$.

c) Betrachten Sie nun den mittleren Spin $\bar{\sigma} = \frac{1}{4} \sum_{i=1, \dots, 4} \sigma_i$. Aus dem Erwartungswert des mittleren Spins $\langle \bar{\sigma} \rangle$ kann man wenig über den Ferromagneten lernen (wieso?); mehr erkennt man aus den Fluktuationen des mittleren Spins, $\langle \bar{\sigma}^2 \rangle$.

Berechnen Sie $\langle \bar{\sigma}^2 \rangle$ aufbauend auf Ihren Ergebnissen aus (b) und skizzieren Sie die Temperaturabhängigkeit der Fluktuationen.

Hausaufgabe

Entropie und chemisches Potential

Zwei Gaskanister der Volumina V_1 und V_2 befinden sich bei Temperatur $T_1 = T_2 = T$ auf potentiellen Energien U_1 und U_2 . Die Kanister, zwischen denen Teilchen des idealen Gases ausgetauscht werden können, befinden sich im Gleichgewicht, d.h. ihr chemisches Potential sei identisch.

a) Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannten Ausdrücke für Energie und Entropie eines klassischen idealen Gases, um das chemische Potential $\mu = \mu_{1/2} = \partial F_{1/2} / \partial N_{1/2}$ zu finden. Das chemische Potential hat in diesem Fall auch Beiträge, die aus der Entropie des Gases stammen. Diese sorgen dafür, dass sich mehr Gasteilchen in einem Kanister aufhalten, wenn sein Volumen vergrößert wird.

b) Zeigen Sie, dass sich aus der Gleichgewichtsbedingung $\mu_1 = \mu_2$ gerade die barometrische Höhenformel, $\rho \propto \exp(-U/k_B T)$, ergibt.